Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag til eksamen i ST1101 Sannsynlighetsregning

Fredag 9. juni 2006

Oppgave 1

a) $P(X_1 \leq 20) = P(Z \leq -0,5) = 0,3085$.

$P(X_1 \leq 26 | X_1 \geq 20) = \frac{P(20 \leq X_1 \leq 26}{P(X_1 \geq 20)} = \frac{P(-0,5 \leq Z \leq 1)}{1 - P(X_1 \leq 20)} = \frac{0,8413 - 0,3085}{0,6915} = 0,7705$

b) Siden $X = X_1 + X_2$ er $N(46, 25)$, vil $P(X_1 + X_2 \geq 45) = P(X \geq 45) = 1 - P(X \leq 45) = 1 - P(Z \leq -0,20) = 0,5793$.

c) Nå er $\frac{Y}{\sigma^2}$ kji-kvadratfordelt med 10 frihetsgrader. Dette gir at $P(Y > 63,04) = P(\frac{Y}{\sigma^2} > \frac{63,04}{\sigma^2}) = P(\frac{Y}{\sigma^2} > \frac{63,04}{16}) = P(\frac{Y}{\sigma^2} > 3,94) = 0,05$.

Oppgave 2

a) Arne tenker at sannsynligheten er 1/6 på hvert av kastene, og da han har tre kast, vil sannsynligheten være $3 \cdot 1/6 = 0,5 = 50\%$. Imidlertid er $P(\text{sekser}) = 1/6 + 5/6 \cdot 1/6 + 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 = 91/216 = 42,1\%$.

Generelt: $P(\text{sekser}) = 1/6 + 5/6 \cdot 1/6 + 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 + \cdots + (5/6)^{n-1} \cdot 1/6 = 1 - (5/6)^n$.

b) $P(\text{sekseren i 3. kastet}) = P(\text{først 2 ikke-seksere, så seksere}) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 = 25/216$.
$P\ (\text{ingen sekser}) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = 125/216$.

Generelt hhv. $(5/6)^{n-1} \cdot 1/6$ og $(5/6)^n$.

c) Multinomisk: $\frac{5!}{2!1!1!1!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})(\frac{1}{6})(\frac{3}{6}) = 5/216$.

d) X tilfredsstiller de kjennetegn ved en tilfeldig variabel. Spillet er ikke rettferdig da P(for $0, 1$ eller $2) = 24/36 = 2/3 = 0,67$.

e) En finner at sannsynlighetsfordelingen til X er gitt ved:

X	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$$E(X) = 0 \cdot 6/36 + 1 \cdot 10/36 + 2 \cdot 8/36 + 3 \cdot 6/36 + 4 \cdot 4/36 + 5 \cdot 2/36 = 70/36 = 1,94$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 6/36 + 1^2 \cdot 10/36 + 2^2 \cdot 8/36 + 3^2 \cdot 6/36 + 4^2 \cdot 4/36 + 5^2 \cdot 2/36 = 210/36 = 5,83$$

Dvs $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5,83 - 3,78 = 2,05$

Forventet verdi uttrykker hva resultatet i gjennomsnitt nærmer seg når antall kast blir stort. Variansen er et mål for variasjonen i disse kastresultatene.

f)

$$E(e^{Xt}) = \sum_{x=0}^{5} e^{xt} p_X(x) = 1 \cdot 6/36 + e^t \cdot 10/36 + e^{2t} \cdot 8/36 + e^{3t} \cdot 6/36 + e^{4t} \cdot 4/36 + e^{5t} \cdot 2/36$$

Da $\frac{d}{dt}(e^{kt}) = k \cdot e^{kt}$, ser vi at oppstillingen til $E(X)$ i 1e) følger av reglene.

Oppgave 3

a) $P(0 \leq X \leq \frac{a}{2}) = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{b+a} dx = \frac{a}{2(a+b)}$

b) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(kX^2 \leq y) = P(X^2 \leq y/k) = P(-\sqrt{\frac{y}{k}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y}{k}}) = F_X(\sqrt{\frac{y}{k}}) - F_X(-\sqrt{\frac{y}{k}})$.

Dersom $0 \leq y < ka^2$:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{\frac{y}{k}}) \cdot \frac{d}{dy}(\frac{y}{k})^{0,5} - f_X(-\sqrt{\frac{y}{k}}) \cdot \frac{d}{dy}(-1)(\frac{y}{k})^{0,5} =$$
$$\frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2} y^{-0,5} - \frac{1}{a+b}(-1)\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{2}y^{-0,5} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{ky}}$$

Dersom $ka^2 \leq y \leq kb^2$:

Da er $F_X(-\sqrt{\frac{y}{k}}) = 0$ som gir $f_Y(y) = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2} y^{-0,5} = \frac{1}{2(a+b)} \cdot \frac{1}{\sqrt{ky}}$.